Función cuadrática

Una función cuadrática es una función polinómica que tiene la siguiente forma general:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Termino cuadrático | Termino Lineal | Termino independiente

Esta es la denominada ***forma polinómica*** de la función, donde a es el coeficiente principal. El coeficiente principal siempre es distinto de cero, en cambio, b y c pueden ser cero. Las funciones polinómicas tienen como ***dominio a todos los reales*** a menos que se especifique lo contrario, y escribimos:

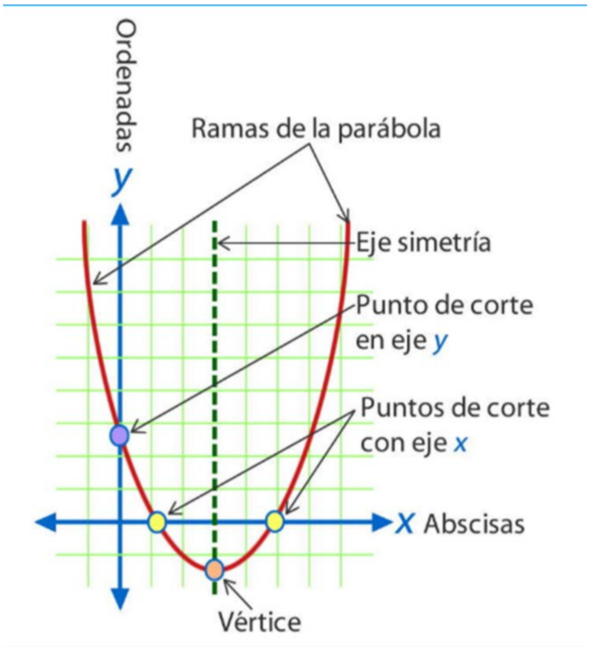
$$D_f = R$$

Gráfico de la función:

El grafico de la función se compone de todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen la ecuación cuadrática.

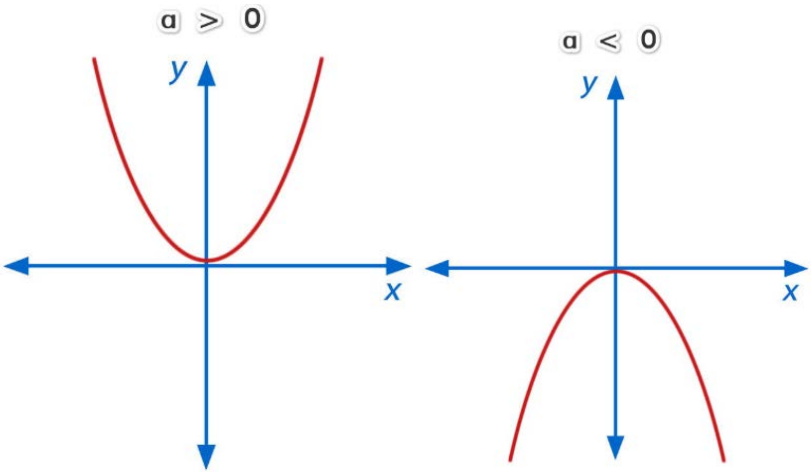
El grafico que se obtiene se denomina parábola, esta es una curva simétrica con respecto a una recta paralela al eje de las ordenadas (eje y), la cual se denomina eje de simetría. Las partes del grafico a ambos lados del eje de simetría se denominan ramas.

Para el trazado del gráfico de esta función es importante determinar el punto denominado vértice, el eje de simetría, los puntos de corte (intersección) con el eje x (raíces) y el punto de corte con el eje y (ordenada al origen). Tanto el vértice, las raíces y el corte con el eje y, están determinados por los coeficientes numéricos a, b y c.

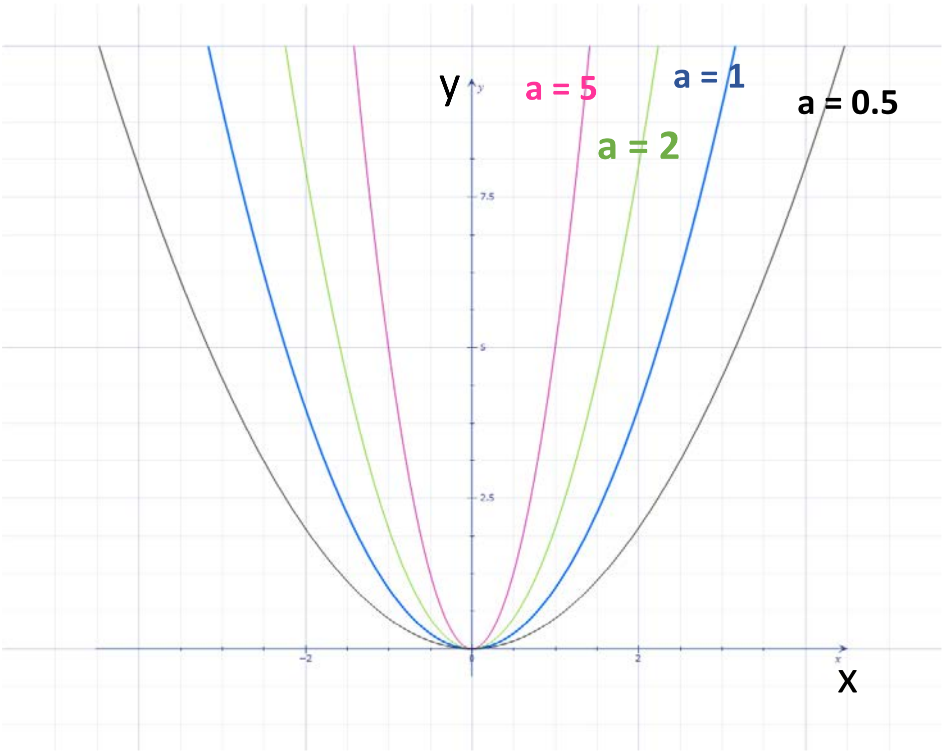


Concavidad:

La concavidad se refiere a la orientación de la abertura de la parábola. La misma está determinada por el signo del coeficiente principal (a): Si “a” es mayor que cero (o sea, es un número positivo), las ramas de la parábola estarán abiertas hacia arriba, y si “a” es menor que cero (o sea, es un número negativo), las ramas de la parábola estarán abiertas hacia abajo



El coeficiente principal “a” también determina la abertura de la parábola: cuanto mayor es el valor absoluto de este coeficiente las ramas se van cerrando y por consiguiente la parábola se contrae.



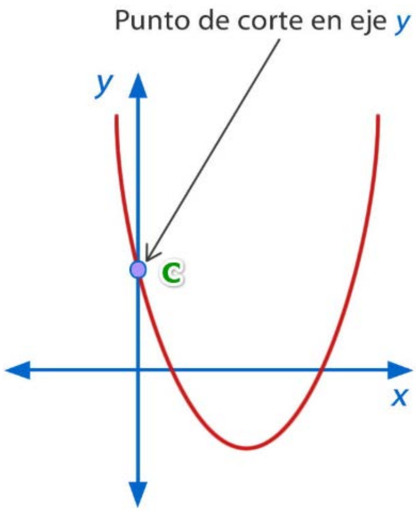
$y = 0.5x^2$ $\quad\quad$ $y = x^2$ $\quad\quad$ $y = 2x^2$ $\quad\quad$ $y = 5x^2$

Punto de corte con el eje y

El punto de corte con el eje "y" está determinado por el valor del término independiente c, ya que si analizamos una función cuadrática en x = 0 obtenemos:

$$y = f(0) = a * 0^2 + b * 0 + c = c$$

Entonces, la parábola corta o cruza el eje "y" en el punto de coordenadas (0, c).



Raíces de la función: puntos de corte con el eje X – forma factorizada

Las raíces son los puntos donde el grafico atraviesa, corta o toca al eje de abscisas (eje x). Estos puntos corresponden a cuando la función toma el valor cero, es decir cuando y = 0 por eso también se les suele llamar ceros de la función.

Para determinar las raíces de la función debemos igualarla a cero, esto implica resolver la ecuación cuadrática:

$$y = 0 \quad \Longrightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0$$

Esta es una ecuación de segundo grado con una incógnita y sus soluciones están dadas por la siguiente expresión, conocida como ecuación de Bhaskara:

$$\boxed{r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

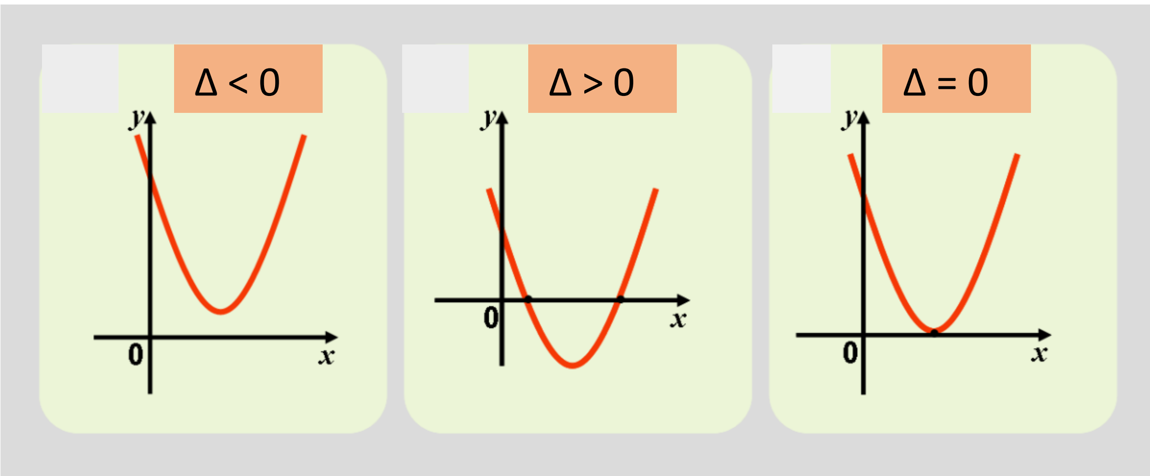
La expresión dentro del radical se denomina **discriminante** y lo simbolizaremos con la letra griega delta (Δ). Es importante porque determina la cantidad de raíces de la función.

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Si Δ < 0 la función no tiene raíces reales y su grafico no corta al eje x

Si Δ > 0 la función tiene dos raíces reales y su grafico corta en dos puntos al eje x

Si Δ = 0 la función tiene una raíz real y su grafico corta al eje x en un solo punto que coincide con su vértice. En este caso se dice que la función tiene una raíz doble.



A toda función polinómica se la puede factorizar conocida sus raíces. En general:

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2) \ldots . (x - r_n)$$

Siendo "a" el coeficiente del término que posee la x a la máxima potencia, es decir, es el coeficiente principal y r_1, r_2,…., r_n las raíces del polinomio.

Para el caso particular de la función polinómica de segundo grado tenemos:

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Si la función no tiene raíces reales (Δ < 0) no se puede factorizar, es decir, no tiene forma factorizada.

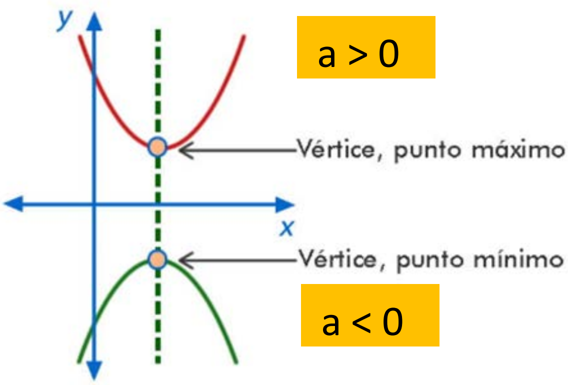
Si la función tiene una raíz real doble (Δ = 0) la función factorizada toma la forma:

$$f(x) = a(x - r)^2$$

La forma factorizada nos da directamente la información de las raíces y la concavidad (coeficiente a).

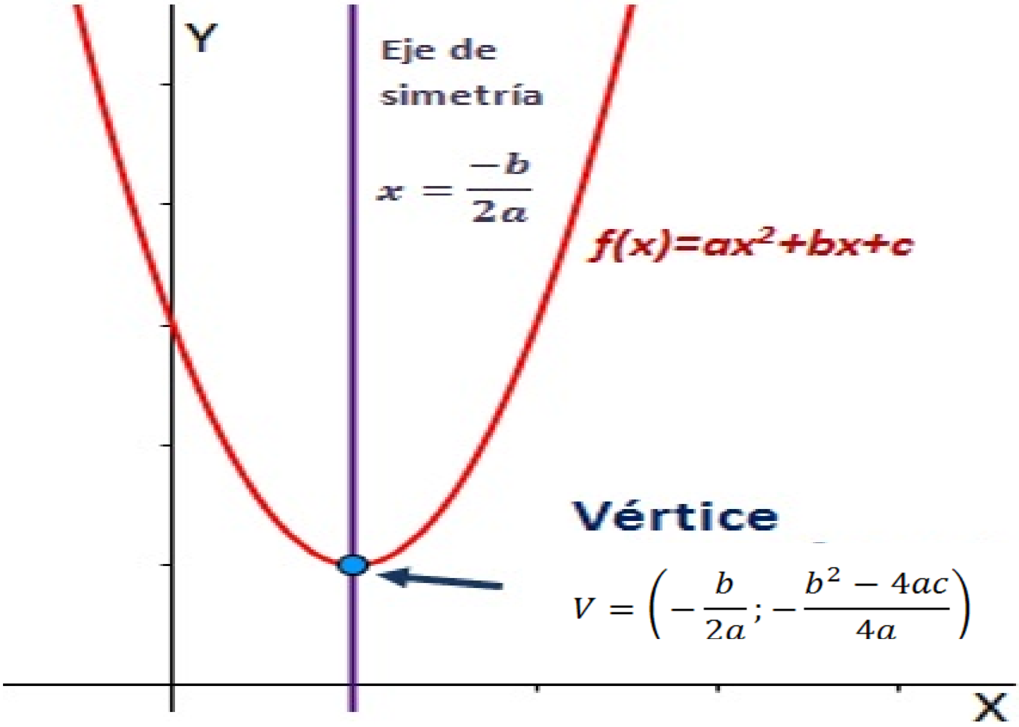
Vértice - eje de simetría - extremo de la función - forma canónica

El vértice es el punto donde cambia de dirección la parábola, es por donde pasa el eje de simetría. Cuando a > 0 (a positivo) el vértice será el punto mínimo de la parábola, en cambio, sí a < 0 (a negativo) el vértice será el punto máximo de la parábola.



Las coordenadas del vertice estan relacionadas con los parametros a, b y c de la forma polinomica, por lo tanto, conocidos estos parametros o coeficientes podemos calcular las coordenadas del vertice:

$$h = -\frac{b}{2a} \qquad k = -\frac{\Delta}{4a}$$



Donde h es la abscisa (coordenada x) del vertice que tambien se puede simbolizar como x_v, y k es la ordenada (coordenada y) del vertice que tambien se puede simbolizar como y_v. Entonces escribimos las coordenadas del vertice:

V: (h, k) Ó V: $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$

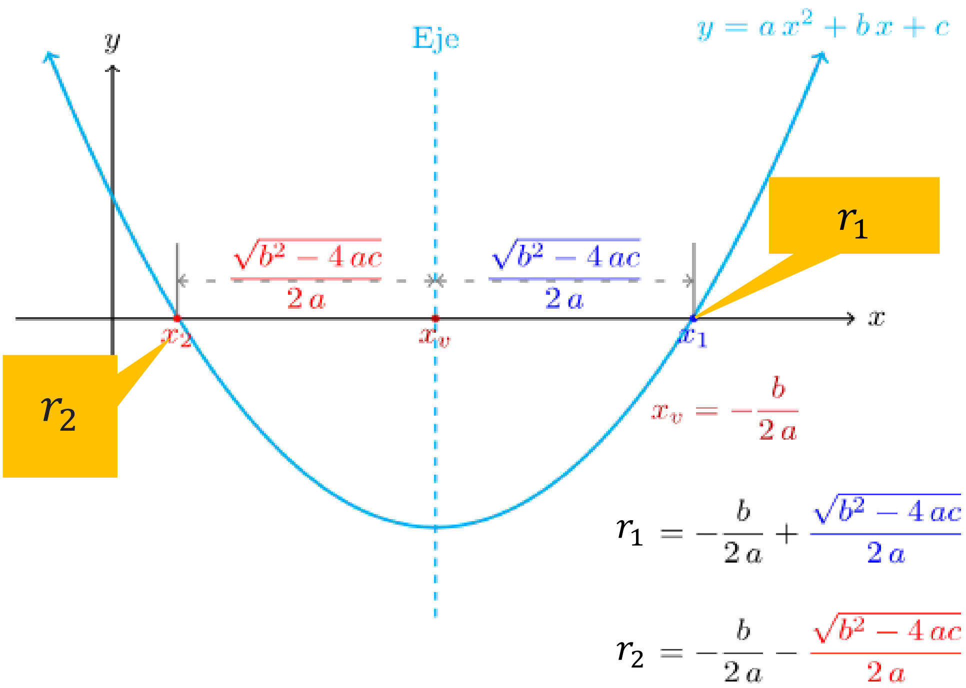
Recordemos que: $\Delta = b^2 - 4ac$

Por lo tanto: $-\Delta = -\left(b^2 - 4ac\right) = -b^2 + 4ac$

La relacion entre las coordenadas del vertice con los coeficientes de la funcion polinomica se obtienen mediante un procedimiento llamado completamiento de cuadrados.

El eje de simetria es la linea vertical que pasa por la coordenada x del vertice. Entonces el eje de simetria lo indicamos como:

$$x = -\frac{b}{2a}$$



En el caso de las funciones cuadráticas que tienen dos raíces se puede establecer una relación entre las mismas con la coordenada x del vértice. Se deduce observando el gráfico que x_v es el punto medio de la distancia entre las dos raíces

$$x_v = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

En el gráfico de arriba las expresiones en rojo y azul, sobre el eje x, corresponden a la distancia que hay desde x_v hasta cada una de las raíces. Las expresiones para r_1 y r_2, que se detallan al lado del gráfico, son nada más y nada menos que las expresiones para calcular las raíces o formula de Bhaskara.

La relación entre x_v (ó h, como también le hemos llamado) y las raíces nos permite hallar el vértice directamente a partir de la expresión factorizada de la función. Una vez calculado x_v reemplazamos su valor en la expresión de f(x) y hallamos y_v:

$$y_v = k = f(x_v)$$

Existe una tercera forma de representar analíticamente (esto es, a través de una expresión matemática) la función de segundo grado: la ecuación canónica, esta se caracteriza porque contiene de forma directa la información del vértice, además de información sobre la concavidad. Es decir, la forma canónica contiene a h y k (coordenadas del vértice) explícitamente. En general:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

Teniendo en cuenta la relación de h y k con los parámetros a, b y c también podemos escribir:

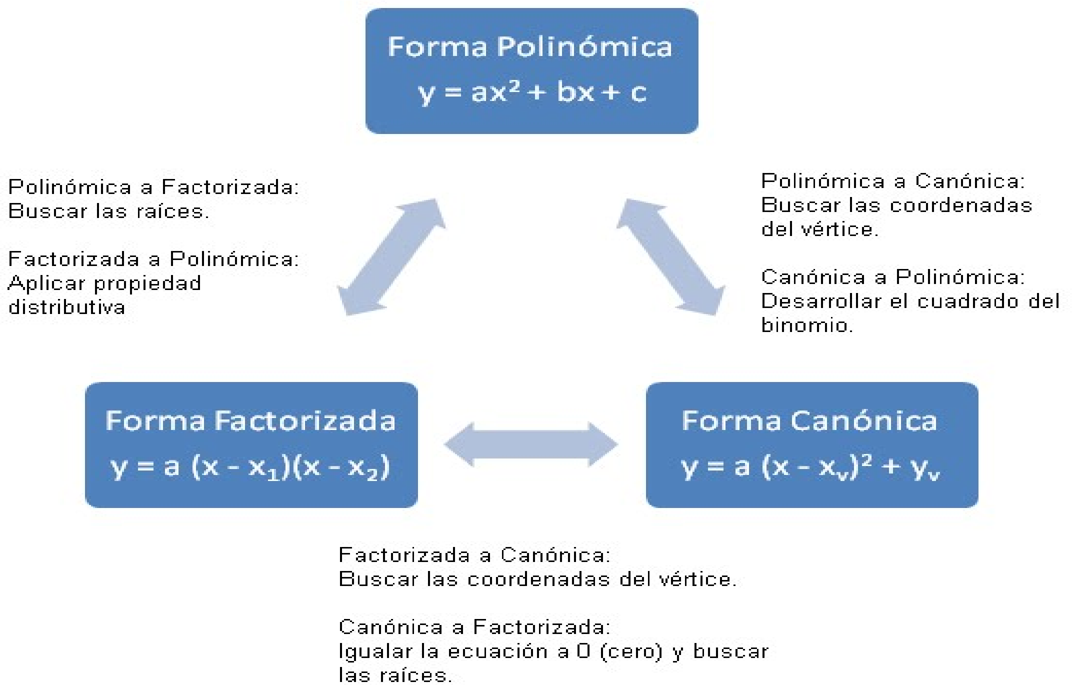
$$y = a(x - \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$y = a(x - \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Resumiendo las distintas expresiones de la función cuadrática:

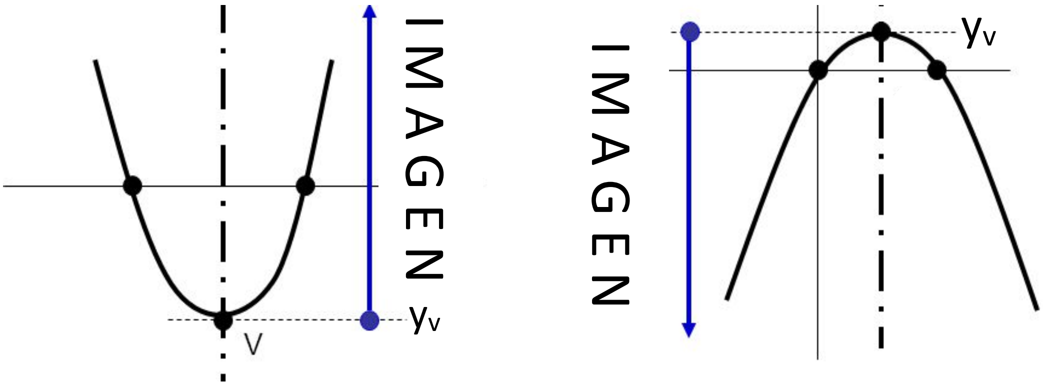
Forma	Expresión	Parámetros	Información explícita
Polinómica	$y = ax^2 + bx + c$	a, b y c	Concavidad e intersección eje y
Canónica	$y = a(x - h)^2 + k$	a, h y k	Concavidad y vértice
Factorizada	$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$	a, r_1 y r_2	Concavidad e intersección eje x

Como se podrá inferir de este texto se puede pasar de una forma a otra realizando ciertos procedimientos resumidos a continuación:



Cuando $\Delta = 0$ hemos dicho que el vértice coincide con la única raíz de la función. Ahora agregamos que, en ese caso, tanto la forma canónica y la factorizada coinciden. Por otro lado al sacar el coeficiente principal como factor común, obtenemos un trinomio cuadrado perfecto (solo cuando Δ = 0).

Imagen

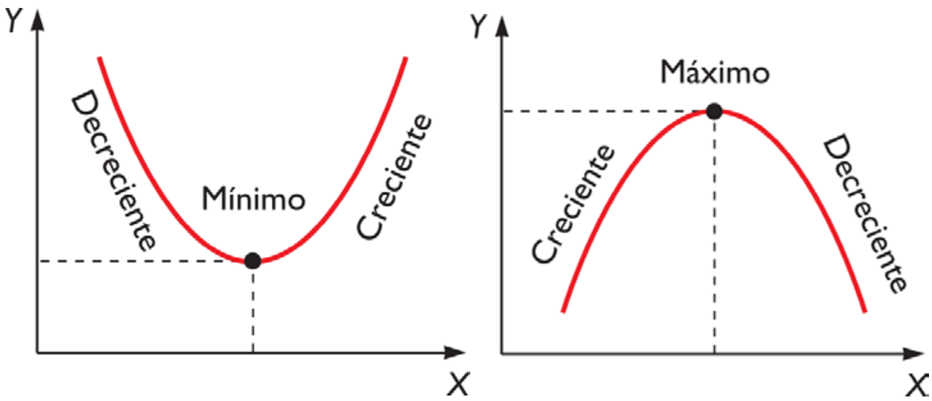


Si ponemos atención en el grafico vemos que:

Si a > 0 $\quad Imf = [y_v, +\infty)$

Si a < 0 $\quad Imf = (-\infty, y_v]$

Intervalos de crecimiento



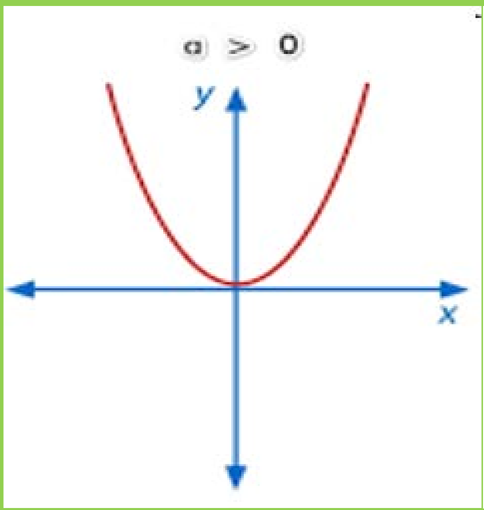
	crecimiento	decrece
a > 0	$(x_v, +\infty)$	$(-\infty, x_v)$
a < 0	$(-\infty, x_v)$	$(x_v, +\infty)$

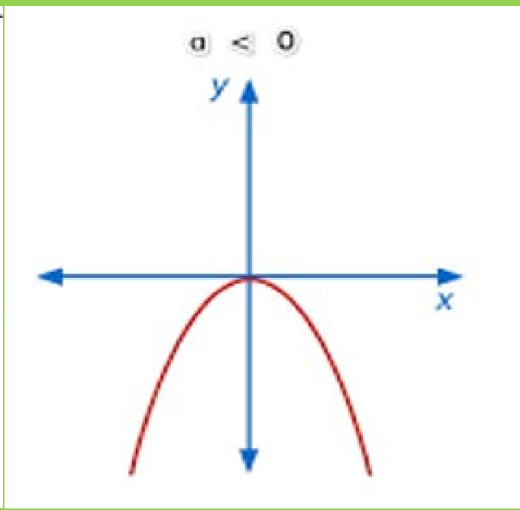
__Formas especiales cuando alguno de los parámetros es igual a cero__

- Caso b = 0 y c = 0

$$y = \ a\,x^2$$

Son funciones cuyos gráficos son simétricos al eje “y”, y tienen el vértice en el origen de coordenadas. Es decir, su vértice es. V = (0, 0) y su eje de simetría es x = 0.

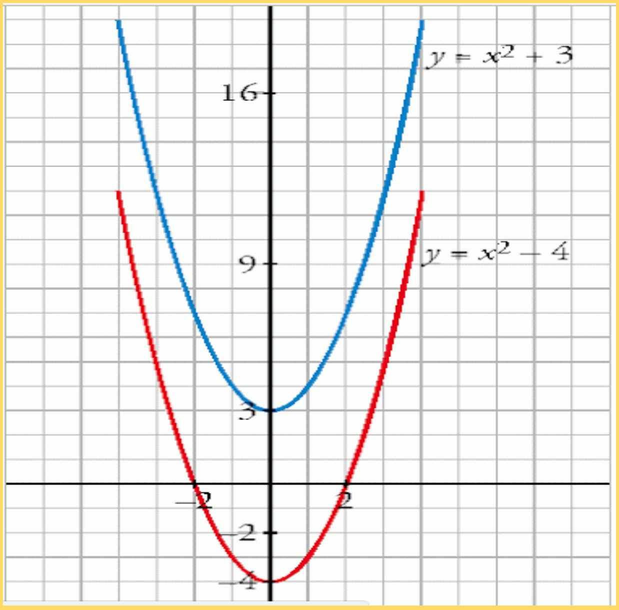


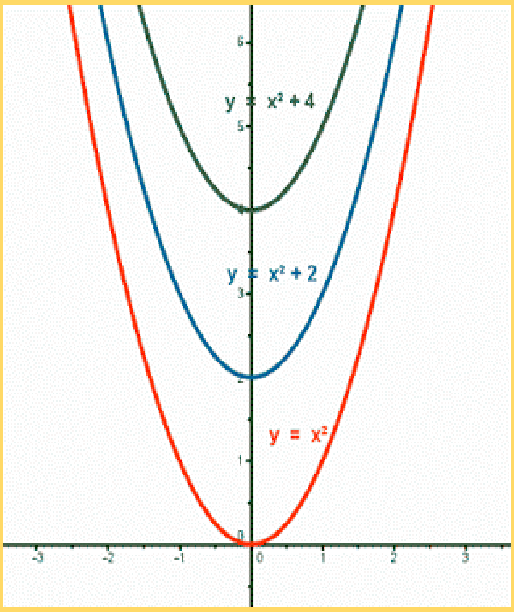


- Caso b = 0 :

$$y = \ a\,x^2 + c$$

Son funciones cuyos gráficos son simétricos al eje “y”, y que tienen el vértice sobre este mismo eje. Es como si una función del punto anterior se desplazara, sobre el eje “y”, c lugares ya sea hacia arriba o hacia abajo. En este caso la forma canónica coincide con la polinómica y se verifica que k = c.

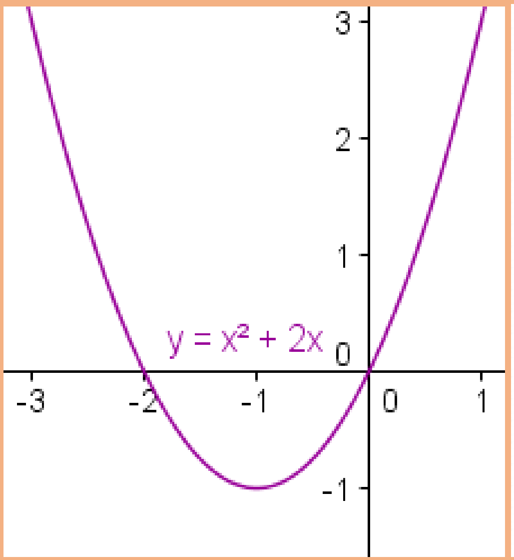


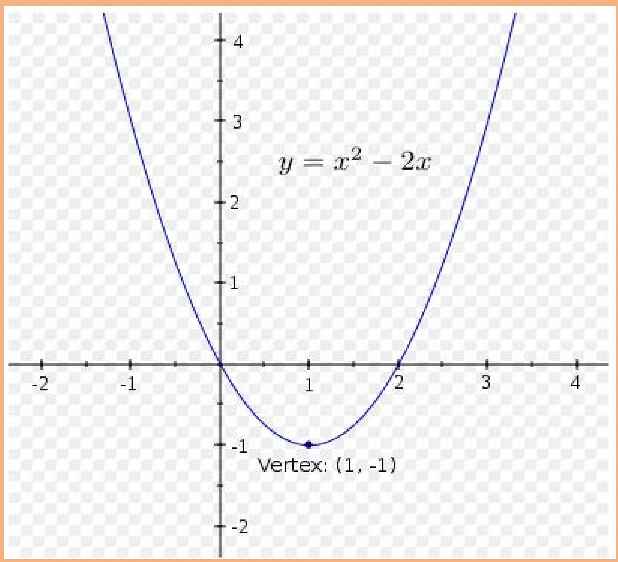


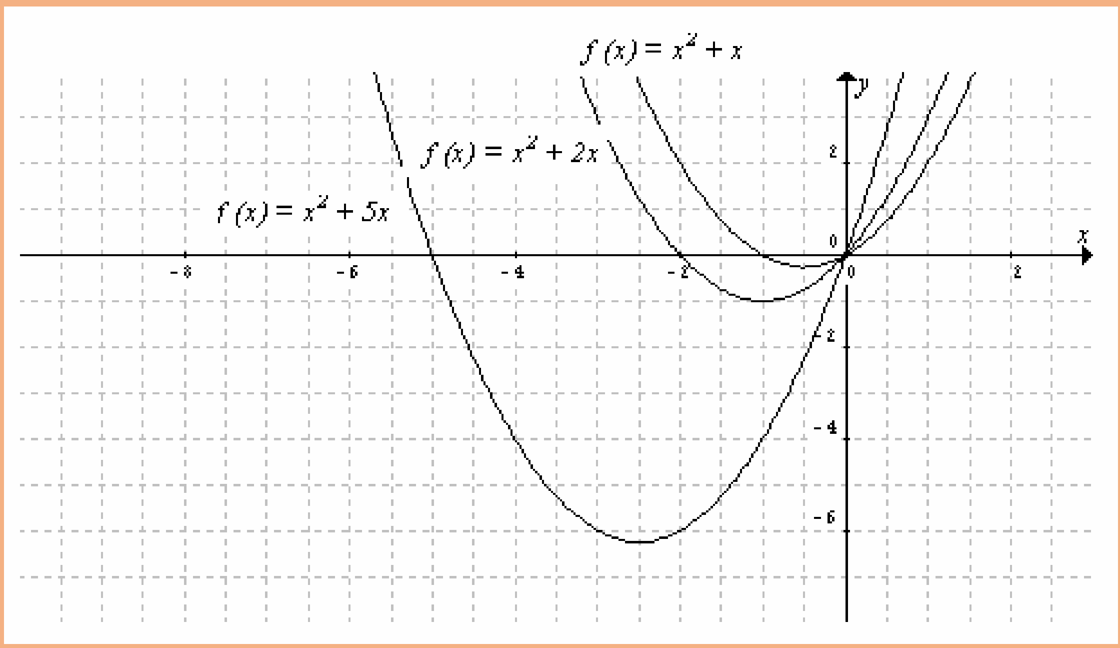
- Caso c = 0

$$y = \ a\,x^2 + bx = ax\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

Si analizamos la expresión podemos determinar directamente las raíces de la función. En este caso el grafico de la función corta al eje x y al eje “y” en el mismo punto, esto es en el origen. En otras palabras la ordenada al origen es cero y x = 0 es una raíz de la función. También $x = -\frac{b}{a}$ es raíz de la función.







Influencia del coeficiente b

Si b > 0 la función corta al eje "y" con la rama creciente

Si b < 0 la función corta al eje "y" con la rama decreciente

Si b = 0 la función corta al eje "y" con el vértice (ver la coherencia de esto con lo expuesto anteriormente del caso especial b = 0 de la página 10)

Representación de funciones cuadráticas

- Encontrar las coordenadas del vértice
- Trazar el eje de simetría
- Tener en cuenta el signo del coeficiente principal (a) para determinar la concavidad
- Hallar las raíces
- Tomar un par de puntos de un lado del eje de simetría y hallar su imagen correspondiente
- Marcar los puntos simétricos a los puntos del paso anterior.

El análisis completo de una función consiste en indicar:

- Dominio
- Imagen
- Vértice
- Eje de simetría
- Raíces
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento
- Máximo o mínimo de la función
- Grafico.

Observación:

Todo punto sobre el eje "x" tiene coordenada "y" igual a cero. Por consiguiente es un punto que tiene la forma:

$$P = (x, 0)$$

Todo punto sobre el eje "y" tiene coordenada x igual a cero. Por consiguiente es un punto que tiene la forma:

$$P = (0, y)$$